放射線科学

「X 線 CT 画像上の雑音分散に関するお話」

池田　充

X 線 Computed Tomography（CT）画像における雑音を評価する指標の一つに「雑音分散」がある。この雑音分散は、均一な CT 値を有することが期待される画像領域における CT 値の変動に関する分散を意味する。雑音分散は、CT 画像がコンピュータで作成されることから容易に計算することができるため、CT の創成期よりよく検討されてきた。小生はこの X 線 CT 画像上の雑音分散について最近検討しているが、この比較的単純な指標も追求すると奥深いものであると改めて思っている。本文では、この指標の「超基礎的」なことについて述べたいと思う。

実際の臨床における CT 画像では厳密な意味で「均一な CT 値となることが期待される領域」を設定することは困難ではあるが、純水等からなるファントムを撮影した画像ではこのような領域を設定すること（あるいは想定すること）は容易である。このようなファントムを X 線 CT によって撮影したとしても、均一な CT 値となることが期待される領域における X 線 CT 画像上の CT 値は均一な値とはならないため分散が生じる。これは、真の値（実際の X 線 CT 画像では、「期待値」に相当する）に対して加減される形で雑音が付加されるとモデル化されこのモデル化によって雑音が定義されるが、このような意味での雑音が付加されるためである。X 線 CT 画像において（既述の意味で）雑音が発生する要因としては、X 線光子の統計的なばらつきによって生じる量子雑音、主に X 線検出器における感度のばらつきによって誘起される構造雑音、半導体素子中に流れる暗電流が原因で発生するとされる電気雑音、ストリークアーチファクトのようなアーチファクトが原因となる雑音等が挙げられている。これまでの研究結果から、X 線 CT 画像上の雑音の多く部分は量子雑音に由来することが明らかとなっていて、この量子雑音は X 線 CT 撮影装置の X 線検出器に到達した X 線光子ゆらぎに起因するがその確率分布はポアソン分布に従うことはよく知られていることである。

さて、雑音分散を計算する対象となる「均一な CT 値となることが期待される領域」における各画素の実際の CT 値を$\{x_i\}$,（$i=$, 2, …, N)とすると、同

領域における CT 値の平均値$\bar{x}$、すなわち、$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$を使用して、雑音分散は、

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \tag{1}$$

として計算される。ここでちょっとした問題がある。

まず、分散について復習してみよう。分散とは、確率論では、確率空間の見本空間上で定義された（実）確率変数に対して、期待値を使用して定義されたものである。このまま話を進めていくことは実際的ではないのでかなり端折るが、まず、関心領域〔region of interest（ROI）〕における実際の CT 値をある確率変数 X と見なすことについては、確率論においても問題はない。問題となるのは、集合$\{x_i\}$について、統計学で言うところの（ある）母集団と見なすかどうかということである。実際の計算に使用する ROI を「均一な CT 値となることが期待される領域」の中の一部分と見なす場合、$\{x_i\}$は母集団の中の一部の要素で構成される標本値と解釈されるので、(1)式で与えられる分散は標本分散と称すべきものとなる。よく知られているように、標本分散の期待値は、母集団における分散の値（この値は母分散と呼ばれる）に一致せず、母分散の値の $\frac{N-1}{N}$ 倍となる。実際の計算に使用する ROI を「均一な CT 値となることが期待される領域」と見なす場合（すなわち、集合$\{x_i\}$を母集団と見なす場合）、(1)式で与えられる分散は母分散となる。この後者の立場では、母分散そのものを計算しているので問題はないが、前者の立場では標本の値から母分散を推定することになる。この場合、推定量の期待値（平たく言えば、推定量の平均値に相当するものだが、この平均の意味は、母集団から選択される標本は複数種類あるので、考えられるすべての標本から計算される推定量の平均を意味する）は、推定すべき母集団における量と一致した方が推定値としては望ましいとされ、このような推定量は「不偏推定量」と呼ばれる。既述のように、標本分散の期待値は母分散とは一致せず不偏推定量とはならない。従って、通常は、

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \tag{2}$$

の計算式を使用して母分散を推定する。標本の値からこの(2)式を使用して計算される分散は、不偏分散として知られているものである。実際に雑音分散を計算する際には、実際の計算に使用する ROI を「均一な CT 値となることが期待される領域」の中の一部分と見なす立場をとる場合が多く、従って、「不偏分散

を使用して雑音分散を推定する」ことが多い。しかしながら、実際の計算に使用する ROI を「均一な CT 値となることが期待される領域」と見なしてもよい場合が想定され、その場合は(1)式を使用して雑音分散を計算することになる。もっとも、実際の計算においては通常 N の値は大きいので、(1)式と(2)式の差はあまりないので、この問題は実用上ではあまり問題とはならない。

次の話題は、ややこしい問題を抱えたものである（実際、数学的には極めて深淵である）。まず、同一の被写体を同一のスライス面で何回も X 線 CT を撮影することを考える（仮想的には無限回撮影することを想定できる）。このようにして、全く同じ被写体の同じスライス面からなる無限個の枚数の画像を得ることができる。このようにして得た CT 画像の各画素について着目すると、その画素における CT 値（以前の表現ではx_iとなる）を（先のようにして得た無限個の枚数からなる）各画像で考えることができるので、このような量を無限個（正確には無限可算個）考えることができる。この量は、x_i^jと表現することができ、この添字の j は無限個（可算無限個）となるが、ある画素に注目した場合、添字 i は固定で添字 j のみから構成される無限集合$\{x_i^j\}$,（$i=1,\ 2,\ \cdots$）を考えることができる。そして、これを母集団とする確率変数を考えることができるので、既述のように、この確率変数の分散を考えることができる。故に、このような意味で、X 線 CT 画像上の各画素における雑音分散を考えることができる。ここで、既述の雑音分散を加えて 2 種類の雑音分散を考えることができること、そして、これらは区別すべきものであることが重要である。先に考えた「均一な CT 値となることが期待される領域」における雑音分散は、添字 j を固定し添字 i のみから構成される集合$\{x_i^j\}$、（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$）を母集団（ないしは、標本）とする確率変数の分散だったのである。

このように、2 種類の雑音分散を考えることができるということは、各画素の雑音を広い意味での確率過程としてモデル化することに相当する。確率過程の考え方によれば、$\{x_i^j\}$において、添字 j に関して期待値を考えることは「集団平均」に相当し、添字 i に関して期待値を考えることは「時間平均」に相当する。これらのこと自体は、X 線 CT 画像に特有なものではなく、単純 X 線写真等においても同様な雑音のモデル化が行われている。しかしながら、X 線 CT 画像の場合、画像の再構成の計算がなされているので、単純 X 線写真における検討と比較してはるかに複雑な検討が必要となる。一つの例として、X 線 CT の撮影過程をかなり単純化したモデルにおいてさえも、x_i^jの各確率分布は添字 i が異なると厳密には異なったものとなる。すなわち、X 線 CT 画像においては、かなり単純化したモデルを使用しても画素ごとに確率分布は厳密には異

なったものとなる。また、このことと密接に関係するが、各画素における「集団平均」としての雑音分散は、「時間平均」としての雑音分散とは一般に一致しない（すなわち、いわゆるエルゴード性は一般には成立しない）。そして、雑音分散に関係する重要な知見は、実は「集団平均」としての雑音分散を検討することによって得られているのである。

上記の最後の文で述べたことが核心に関わることであるが、現在小生はこれに関連することをゆっくりとしたペースで検討を進めている。

（名古屋大学大学院医学系研究科医療技術学専攻医用量子科学講座教授）