放射線科学

「フーリエ変換の定義に関するお話」

池田　充

一昨年の本誌で述べたように、小生は現在名古屋大学の医学部保健学科放射線技術科学専攻の学部学生向けの講義の一部を担当している。それらの講義において、フーリエ変換に触れる機会が少なからずあるが、その際に学部学生の理解が十分でなく誤解しているのではないかと感じることを毎年経験する。フーリエ変換の定義［下記の(1)式を参照］においては、高校までに履修する数学の範囲を超えることがいくつか存在する。これらのことは、(当然ではあるが) フーリエ変換に触れる前に習得している必要があるが、大学等でのフーリエ変換の履修の際には“自明なこと”として解説されないことが多い。理由はわからないが、小生の経験ではこれらの事項の理解が不十分な学生が実に多いのである。本稿では、この学部学生が理解不十分であると感じているフーリエ変換の定義に関する“超基礎的なこと”(フーリエ変換を学習するにあたって当然知っているべきこと) について、“高校までの数学のみ習得している”ことを前提として述べたいと思う。

フーリエ変換は、実変数 x に対する１次元関数 $f(x)$ を考えて、それに対するフーリエ変換を ω を実変数として $F(\omega)$ と表記した時、i を虚数単位として ($i=\sqrt{-1}$)、

$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\omega x)\,dx \tag{1}$$

として与えられると定義される[1]場合が最も多い。この定義の段階から誤解を与えることとして、フーリエ変換の定義については色々な種類があることがあげられる。逆変換との関係にからむ「スケール因子」に関すること[1]に限定しても小生の知る限りで３種類あるのである。従って、文献を読む際など、どの定義であるかを最初に認識する必要がある。このことは、フーリエ変換の定義が複数あることを知っていれば通常は問題となることは少ないが、知っていないと混乱することになる。

次に、$\exp(-i\omega x)$ について考える。小生も最初に見た時戸惑ったのであるが、この表記自体が高校までの数学では使用しないことが多いので、この表記

の意味からはじめる。(実変数に限定しない) 任意の複素数の変数 z に対して、$\exp(z)$ は、「自然対数の底」である e を底とする指数関数を意味する[2]。本稿の主旨では、この e についても単に「自然対数の底」とするだけですますべきではないのであるが、これについて述べると紙面をかなり要するので今回は省略させていただく。当然ながら、$\exp(-i\omega x)$ と表記する代わりに、$e^{-i\omega x}$ と表記してもよいのであるが、$\exp(-i\omega x)$ の表記に馴染みのない方のために(1)式では敢えて $\exp(-i\omega x)$ の表記を使用した。

ここまでで、$\exp(-i\omega x)$ は、e を底とし、$-i\omega x$ をべき指数 (冪指数と表記すべきと思うが、"べき" について漢字での表記には難しい問題があるようなのでこのように表記する。以下同様) とする、べき演算を意味する[2、3]ことは「なんとなく」おわかりいただけたと思うが、ここからが問題である。i は虚数単位であるので $-i\omega x$ は純虚数であるが、"e の「虚数乗」て何?" ということになる。実変数 x に対する指数関数 $\exp(x)$ は、高校までの数学で履修済みであると認識しているが、高校までの数学の「流儀」に従った考え方では e の「虚数乗」を理解することはできない。

この高校までの数学の「流儀」で $\exp(x)$ を考えることについても、厳密に考えると難しいことが実に多く、特に x が無理数の場合には高校までの数学では理解が不十分であると思われるので、以下に「おさらい」の意味で非常に単純化して述べておく。自然数 n に対して $\exp(n)$ は e を n 回掛け算することと定義し、それをふまえて、$\exp(0)=0$、$\exp(-n)=1/\exp(n)$ と定義することによって整数までその定義を拡張する[3]。さらに、$\exp(1/n)$ は $\exp(1/n)$ を n 回掛け算することによって e となるような数とし、有理数 $r=m/n$ に対して、$\exp(r)=\exp(m/n)$ は $\exp(1/n)$ を m 回掛け算することによって得られる数とする[3]。このようにして、有理数 r まで指数関数 $\exp(r)$ が (以上の記述は不十分ではあるが) 定義される所まできたが、ここまでは高校までに履修することである。無理数 x に対しては、簡単に述べると、無理数 x に収束する有理数の数列 $\{x_n\}$ を考え、それに対する $\exp(x_n)$ の極限値として $\exp(x)$ を定義する[4]。ここで、有理数 r が増大すれば $\exp(r)$ が増大するという性質 ($\exp(r)$ の単調性) 等を使用する[4]のであるが、実用的にはここで述べたことだけで十分と思われるので詳細については省略する。以上で、高校までの数学の「流儀」での実変数 x に対する指数関数 $\exp(x)$ の意味のおさらいを終えるが、これを複素数の領域まで拡張するにあたっては見方を変える必要がある。

ある区間において、実数 x の関数 $f(x)$ が何回でも微分が可能で、(以下、n は自然数として、) 第 n 回までの Taylor の公式における余剰項 $R_n(x)$ が同区間内

のすべての x に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ である時、関数 $f(x)$ は同区間内で以下のような Taylor 級数と呼ばれる（ここでは、0 に関するものであるので、特に Maclaurin 級数とも呼ばれる）無限級数の形で表現することができる[4]。

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{2}$$

これは、関数 $f(x)$ の Taylor 展開（Maclaurin 展開）とも呼ばれるものである[4]。以上、高校までの数学では出現しないことを含むことを申し上げたが、“関数 $f(x)$ が「望ましい」性質を有している時は上記のような無限級数の形に展開できる”ということを事実として認識していただければ実用上問題はなく、また、この無限級数については、各 x に対して高校で履修する無限級数の和と考えて実用上問題はない。ここで、(2)式は、“与えられた条件下では各 x に対して各無限級数が収束するのでその値が $f(x)$ となる”ことを意味している。よく知られているように、実変数 x に対する指数関数 $\exp(x)$ は、何回でも微分可能であり、かつ、何回微分しても同じ形となるので、$f(x)=\exp(x)$ で、$f(0)=f^{(n)}(0)=1$ であり、$\exp(x)$ の Maclaurin 展開は、

$$\exp(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{3}$$

として与えられる。この右辺の形の x の関数としての無限級数は、x のべき級数と呼ばれるものであるが、(3)式の右辺のべき級数は、べき級数として、x がすべての実数に対して収束するのみならずすべての複素数に対して収束する（ただし、$z\to\infty$ の場合を除く）という特筆すべき性質を有している[4]。（ここで、複素数の無限級数の収束の定義が必要となるが、高校で履修する無限級数の収束性を実数と虚数の部分に分けることによって自然な形で複素数に置き換えて考えれば実用的には問題ないであろう。このことは、下記で述べる複素数値関数の積分と事情は同じであるので同記述も参考にしていただきたい。）そこで、これまでの考え方を逆にして、(3)式の右辺のべき級数で与えられる関数を $\exp(x)$ と定義する[4]と考えるのである。このような定義は、数学的には正確な表現とは言えない（文献４）では正確な記述がなされているので必要な方は同文献を参照されたい）が、実用的にはこのような考え方で問題ないであろう。このように定義すると考えれば、$\exp(x)$ における変数を複素数 z に置き換えることによって、定義域を複素数 z に拡張した指数関数 $\exp(z)$ を考えることができる。当然ながら、指数関数 $\exp(x)$ の有する性質について、このような定義によるものと高校までの数学の「流儀」の意味によるものは同じになる。少し脇道にそれるが、“行列に対する e の「行列乗」”という概念も、同様に考えることができ

る。もう一つ、上記のような指数関数の複素数のへの拡張は、いくつかある考え方の一つであって、拡張の方法は他にもあることを付け加えておく。

$\sin x$と$\cos x$の Maclaurin 展開は、(2)式を使用すれば、それぞれ、

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{5}$$

で与えられるが、これら(4)式と(5)式の右辺のべき級数は、$\exp(x)$と同様に、べき級数として、xがすべての実数に対して収束するのみならずすべての複素数に対して収束する（ただし、$z\to\infty$の場合を除く）という性質を有している[4]。従って、関数$\exp(x)$と同様に、$\sin x$と$\cos x$についても、それぞれ、(4)式と(5)式の右辺のべき級数で与えられる関数として定義する[4]と考えることができる。また、(3)式と(4)式と(5)式から、実数θに対して、

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \tag{6}$$

という関係を導くことができる。この(6)式は、オイラーの公式として有名なものであり、かつ、極めて重要なものである。

次に、(1)式の積分であるが、この積分は「広義積分（または、変格積分）」と称すべき積分である[4]。この積分の意味は、任意の$a<b$によって与えられる変数xの閉区間$[a、b]$において関数$f(x)$が積分可能である時、下式［(7)式］の右辺の極限値が存在するならば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty,\,a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{7}$$

その極限値を上式［(7)式］の左辺の表記の定義とする[4]、ということである。（この記述は、数学的にはやや厳密性を欠くものであるが、フーリエ変換を考える上では問題ないものである。）ここで、(7)式の右辺における$\lim\limits_{b\to\infty,\,a\to-\infty}$の極限の意味は、$a$と$b$をそれぞれ独立に極限値を考えた時、両方ともにその極限が確定する必要があり、確定した時のみその値を(7)式の左辺として表記する[4]という意味であり、特に、

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \tag{8}$$

とは異なるということが重要である。また、以上のことから、フーリエ変換は、(1)式中の関数$f(x)$について、すべての関数に対して存在するものではないこともご理解いただけると思う。

さらに、(1)式の積分においては、xで表記される積分変数は実数であるが、被積分関数である$f(x)\exp(-i\omega x)$は複素数であり、いわゆる複素数値関数と称さ

れるものである［ここで、関数$f(x)$もまた一般には複素数値関数であるであることに注意]。複素数値関数の実数の変数に関する積分は、複素数に複素数が対応する複素関数における積分とは異なり（この複素関数における積分の説明にはかなり紙面を要するものとなる)、被積分関数$f(x)$を実数部分$R(x)$と虚数部分$I(x)$にわけて表記した時、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [R(x) + iI(x)]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} I(x)\,dx \tag{9}$$

として積分を実施すればよい。この(9)式の最右辺の式における積分は既述の意味での広義積分である。また、広義積分以外の通常の積分の複素数値関数の積分についても、実数部分と虚数部分にわけて、それぞれについて実数における積分をおこなえばよい。

最後に、(1)式で与えられるフーリエ変換については、下記の逆変換が存在すること[1]を申し添える。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega x)\,d\omega \tag{10}$$

以上で、フーリエ変換の定義の一つである(1)式の積分に関して知っていてほしい事項の概略を述べたが、当初予想したより多くの紙面を要した。今回、本稿を記載するにあたって数学が実に奥深い学問であることを改めて感じた。一人でも多くの方が数学に改めて魅力を感じていただければ筆者としては誠に幸いである。

参考文献

1．木村英紀、*Fourier-Laplace* 解析　岩波講座 応用数学５［方法４］1993：岩波書店。
2．https://ja.wikipedia.org/wiki/指数関数　等を参照。
3．https://ja.wikipedia.org/wiki/冪乗　等を参照。
4．高木貞治、解析概論 改訂第３版。1983：岩波書店。

（名古屋大学大学院医学系研究科医療技術学専攻医用量子科学講座教授）